Бертран Рассел

Мое философское развитие

Глава 7 «Principia mathematical»: Философские аспекты

На протяжении всего периода от 1900 до 1910 года Уайтхед и я отдавали большую часть нашего времени тому, что в конце концов стало "Principia Mathematica". Хотя третий том этого труда был издан лишь в 1913 году, работа над ним (кроме вычитки гранок) была завершена уже в 1910 году, когда мы сдали рукопись в издательство Кембриджского университета. Моя книга "Принципы математика", которую я закончил 23 мая 1902 года, была слабым и весьма незрелым наброском будущего труда, но отличалась, однако, от него тем, что содержала дискуссии с другими философскими концепциями математики.

Наши проблемы были двух родов: философские и математические. Вообще говоря, Уайтхед оставил философские проблемы мне. Что касается математических проблем, то Уайтхед придумал большую часть нотации, за исключением того, что было взято у Пеано; я проделал большую часть работы, связанной с рядами, а Уайтхед проделал большую часть всего остального. Но это относится только к первым наброскам. Каждая часть исправлялась ло три раза. Когда один из нас заканчивал набросок, он посылал его другому, и тот обычно значительно изменял его. После этого автор первоначального варианта приводил все к окончательному виду. Вряд ли есть хоть одна строчка во всех трех томах, которая не была бы плодом нашего совместного труда.

Главная цель "Principia Mathematica" состояла в доказательстве того, что воя чистая математика следует из чисто логических предпосылок и пользуется только теми понятиями, которые определимы в логических терминах. Это было, разумеется, антитезой учению Канта, и первоначально задача виделась в том, чтобы внести лепту в дело опровержения "того софиста-филистимлянина", по выражению Георга Кантора, добавлявшего для вящей точности: "который так плохо знал математику". Но со временем работа продвинулась еще в двух направлениях. С математической точки зрения были затронуты совершенно новые вопросы, которые потребовали новых алгоритмов и сделали возможным символическое представление того, что ранее расплывчато и неаккуратно выражалось в обыденном языке. С философской точки зрения наметились две противоположные тенденции: одна-приятная, другая-неприятная. Приятная состояла в том, что необходимый логический аппарат вышел не столь громоздким, как я вначале предполагал. Точнее, оказались ненужными классы. В "Принципах математики" много обсуждается различие между классом как единым (one) и.классом как многим (many). Вся эта дискуссия вместе с огромным количеством сложных доказательств оказалась, однако, ненужной. В результате работа в ее окончательном виде была лишена той философской глубины, первым признаком которой служит темнота изложения.

Неприятная же тенденция была, без сомнения, очень неприятной. Из.посылок, которые принимались всеми логиками после Аристотеля, выводились противоречия. Это свидетельствовало о неблагополучии в чем-то, но не давало никаких намеков на то, каким образом можно было бы исправить положение. Открытие одного такого противоречия весной 1901 года положило конец моему логическому медовому месяцу. Я сообщил о неприятности Уайтхеду, который "утешил" меня словами: "Никогда больше нам не насладиться блаженством утренней безмятежности".

Я увидел противоречие, когда изучил доказательство Кантора о том, что не существует самого большого кардинального числа. Полагая в своей невинности, что число всех вещей в мире должно составлять самое большое возможное число, я применил его доказательство к этому числу-мне хотелось увидеть, что получится. Это привело меня к открытию очень любопытного класса. Размышляя способом, который до тех пор казался адекватным, я полагал, что класс в некоторых случаях является, а в других-не является членом самого себя. Класс чайных ложек, например, не является сам чайной ложкой, но класс вещей, которые не являются чайными ложками, сам является одной из вещей, которые не являются чайными дожками. Казалось, что есть случаи и не негативные: например, класс всех классов является классом. Применение доказательства Кантора привело меня к рассмотрению классов, не являющихся членами самих себя; эти классы, видимо, должны образовывать некоторый класс. Я задался вопросом, является ди этот класс членом самого себя или нет. Если он член самого себя, то должен обладать определяющим свойством класса, т. е. не являться членом самого себя. Если он не является членом самого себя, то не должен обладать определяющим свойством класса и потому должен быть членом самого себя. Таким образом, каждая из альтернатив ведет к своей противоположности. В этом и состоит противоречие.

Поначалу я думал, что в моем рассуждении должна быть какая-то тривиальная ошибка. Я рассматривал каждый шаг под логическим микроскопом, но не мог обнаружить ничего неправильного. Я написал об этом Фреге, который ответил, что арифметика зашаталась и что он увидел ложность своего Закона V. Это противоречие настолько обескуражило Фреге, что он отказался от главного дела своей жизни-от попытки вывести арифметику из логики. Подобно пифагорейцам, столкнувшимся с несоизмеримыми величинами, он нашел убежище в геометрии, явно посчитав, что вся его предшествующая деятельность была заблуждением. Что касается.меня, то я чувствовал, что причина в логике, а не в математике, и что именно логику и следовало бы преобразовать. Я укрепился в этом мнении, когда открыл рецепт составления бесконечного числа противоречий.

Философы и математики реагировали на ситуацию по-разному. Пуанкаре, не любивший математическую логику и обвинявший ее в бесплодности, обрадовался: “Она больше не бесплодна, она рожает противоречия”. Это блестящее замечание, впрочем, никак не способствовало решению проблемы. Некоторые другие математики, относившиеся неодобрительно к Георгу Кантору, заняли позицию Мартовского Зайца: “От этого я устал. Поговорим о чем-нибудь другом”, что точно так же казалось мне неадекватным. Спустя какое-то время появились серьезные попытки решения со стороны людей, которые понимали математическую логику и осознавали насущную необходимость решения противоречия в терминах логики. Первым из них был Ф. П. Рамсей, ранняя смерть которого, к сожалению, оставила его работу незаконченной. Но в годы, предшествующие изданию “Principia Mathematica”, опыта решения проблемы не было и я находился по сути один на один с собственным замешательством. Парадоксы обнаруживали и раньше, некоторые были известны в древности; как мне казалось, тогда ставили похожие проблемы, хотя авторы, писавшие после меня, считали, что проблемы греков были иного рода. Наиболее известен парадокс об Эпимениде-критянине, который сказал, что все критяне лжецы, и заставил людей сомневаться, не лгал ли он, когда говорил это. Этот парадокс в самой простой форме возникает, когда человек говорит: “Я лгу”. Если он лжет, то ложно, что он лжет, и, следовательно, он говорит правду; но если он говорит правду, то лжет, ибо именно это он утверждает. Противоречие поэтому неизбежно. Это противоречие упоминается св. Павлом (Тит. I, 12), который, однако, не занимался его логическими аспектами, а доказывал с его помощью порочность язычников. Такие древние головоломки математики могли отрицать как не имеющие отношения к их предмету, но вот вопрос о самом большом кардинальном или ординальном числе они отбросить не могли, а он приводил их к противоречиях. Противоречие, связанное с самым большим ординалом, было обнаружено Бурали-Форти еще до того, как я открыл свое противоречие, но в его случае дело было гораздо более сложным, и я поэтому позволил себе предположить, что в его рассуждения закралась какая-то незначительная ошибка. В любом случае его противоречие, будучи гораздо более простым, чем мое, казалось prima facie менее разрушительным. Правда, в конце концов я вынужден был признать, что оно не менее серьезно.

В “Принципах математики” я не претендовал на то, что решение найдено. Я писал в предисловии: “Издавая работу, содержащую так много нерешенных трудностей, я оправдываю это тем, что исследование не дало пока ближайшей перспективы для адекватного решения противоречия, обсужденного в главе X, и не позволило лучше разобраться в природе классов. Постоянно обнаруживаемые ошибки в решениях, какое-то время меня удовлетворявших, выявили всю серьезность проблем, которые не поддавались обманчиво правдоподобньм теориям, порожденным поверхностным размышлением, а только скрывались под этими теориями; поэтому я счел за лучшее сформулировать трудности и не ждать того времени, когда меня убедит истинность какого-нибудь почти наверняка ошибочного учения”. А в конце главы о противоречиях я сказал: “В противоречии не замешана никакая философия, оно порождено.здравым смыслом и может быть разрешено, лишь если мы отринем одно из его допущений. Только гегелевская философия, которая живет за счет противоречий, может остаться безучастной, потому что находит подобные проблемы всюду. В любом другом учении столь прямой вызов требует ответа либо признания в бессилии. К счастью, других аналогичных трудностей, насколько я знаю, "Принципы математики" не содержат". В приложении к книге излагалось учение о типах как возможное решение. Впоследствии я убедился, что решение действительно обнаруживается с помощью этого учения, но в "Принципах математики" я пришел к его очень грубой и неадекватной форме. Мои выводы того времени выражены в последнем параграфе книги: "Резюмируем: как оказалось, специальное противоречие главы X решается с помощью учения о типах, но имеется по крайней мере одно аналогичное противоречие, которое, вероятно, неразрешимо с помощью этого учения. Тотальность всех логических объектов, или всех суждений, предполагает, по-видимому, фундаментальную логическую трудность. Каково окончательное ее решение, я не выяснил; но поскольку она оказывает влияние на сами основы рассуждения, я очень рекомендую всем, кто изучает логику, обратить на это внимание".

Завершив "Принципы математики", я начал настойчиво искать решение парадоксов. Это было почти личным вызовом, и при необходимости я готов был потратить на них всю оставшуюся жизнь. Однако по двум причинам я отказался от этого намерения. Во-первых, проблема в какой-то момент показалась мне тривиальной, а я ненавидел все недостойное внимания и интереса. Во-вторых, сколько я ни старался, решение не приходило. На всем протяжении 1903 и 1904 годов я почти все время занимался этим вопросом, но без каких-либо признаков успеха. Первой удачей стала (весной 1905 года) теория дескрипций. Она, разумеется, не была связана с противоречиями, но позже такая связь выявилась. В конце концов мне стало совершенно ясно, что в какой-то форме учение о типах существенно важно. Не настаивая на той конкретной форме, которая придана этому учению в "Principia Mathernatica", я остаюсь при полном убеждении, что без теории типов парадоксы разрешить невозможно.

Когда я искал решение, мне казалось, что для того, чтобы решение выглядело удовлетворительным, необходимы три условия. Первое из них и абсолютно обязательное: противоречия должны исчезнуть. Второе-весьма желательное, хотя логически не непременное: решение должно оставить в неприкосновенности как можно больше математики. Третье, трудно формулируемое: решение должно, видимо, апеллировать к так называемому "логическому здравому смыслу", т. е. оказаться в конце концов таким, каким мы его и ожидали увидеть. Из этих трех условий первое, разумеется, признано всеми. Второе, однако, отвергается теми, кто считает, что значительные разделы анализа в их нынешней формулировке неверны. Третье условие не считают существенно важным те, кто довольствуется логической техникой. Профессор Куайн, к примеру, нашел системы, которые привлекают своей изобретательностью. Но их нельзя считать удовлетворительными, поскольку они, видимо, созданы ad hoc; и они отличаются от тех систем, которые представлял бы себе самый умный логик, если бы не знал о противоречиях. По этому вопросу, однако, вышло огромное количество трудной для понимания литературы, и я не буду касаться более тонких моментов.

Объясню общие принципы теории типов, не вдаваясь в трудные технические детали. Возможно, лучше всего будет начать с того, что имеется в виду под "классом". Возьмем пример из домашнего хозяйства. Допустим, в конце обеда хозяин предлагает на выбор три сладких блюда, настаивая на том, чтобы вы попробовали одно, два или все три, как вы пожелаете. Сколько-линий поведения открыто перед вами? Вы можете от всего отказаться. Это первый выбор. Вы можете выбрать что-то одно. Это можно сделать тремя различными способами, и, следовательно, перед вами еще три варианта. Вы можете выбрать два-блюда. Это также возможно сделать тремя способами. Или вы можете выбрать все три, что дает одну, последнюю, возможность. Общее число возможностей, таким образом, равно восьми, т. е. 23 Можно легко обобщить эту процедуру. Положим, перед вами п объектов и вы желаете знать, сколько путей имеется, чтобы ничего не выбрать, или что-то выбрать, или же-выбрать все п. Вы обнаружите, что число путей 2n. Если выразить это в логическом языке: класс из п-то количества элементов имеет 2n подклассов. Это суждение истинно и в том случае, когда п бесконечно. Кантор как раз и доказал, что даже в этом случае 2n больше, чем п. Применяя это, как сделал я, ко всем веща.м во Вселенной, мы приходим к заключению, что классов вещей больше, чем вещей. Отсюда следует, что классы не являются "вещами". Но поскольку никто не знает точно, что означает слово "вещь" в этом утверждении, не очень-то легко тбчно сформулировать, что именно удалось доказать. Заключение, к которому я пришел, состояло в том, что классы – это просто подсобное средство в рассуждении. Классы приводили-меня в замешательство уже в то время, когда я писал "Принципы математики". Тогда я выражал свои мысли на языке, который был реалистическим (в схоластическом смысле) в большей мере, чем мне представляется сегодня правильным. Я писал в предисловии к той работе: “Обсуждение неопределенностей (indefinables), составляющее главный предмет философской логики, имеет целью ясно увидеть и прояснить для других соответствующие сущности, чтобы разум мог быть с ними знаком так же, как с красным цветом или вкусом ананаса. Там, где-как в данном случае-неопределимости получаются прежде всего в качестве необходимого остатка в процессе анализа, зачастую проще знать, что такие сущности должны быть, чем наблюдать их актуально; здесь имеется аналогия с процессом открытия Нептуна, с тем различием, что последний этап-поиски с помощью умственного телескопа сущности, которая имеет выводной характер,-нередко является самой трудной частью во всем предприятии. Признаюсь, что в случае с классами я не смог увидеть понятия, выполняющего те условия, которым должно удовлетворять понятие “класс”. И противоречие, обсуждаемое в главе X, доказывает, что чего-то не хватает, но чего именно, я до сих пор не обнаружил”.

Теперь мне следует сформулировать вопрос несколько иначе. Следует сказать, что если дана любая пропозициональная функция, скажем fx, имеется некоторая область значений x, для которых эта функция “значима”, т. е. либо истинна, либо ложна. Если a принадлежит этой совокупности, то fa-суждение, которое либо истинно, либо ложно. Вдобавок к подстановке постоянной вместо переменной x есть еще две вещи, которые можно делать с пропозициональной функцией: можно утверждать, во-первых, что она всегда истинна, а во-вторых- что она иногда истинна. Пропозициональная функция “если x человек, то x смертен” всегда истинна; пропозициональная функция “x человек” иногда истинна. Таким образом, с пропозициональной функцией можно проделать следующие три вещи: первое-подставить константу вместо переменной; второе-утверждать все значения функции: и третье-утверждать некоторые значения или по крайней мере одно значение. Сама по себе пропозициональная функция есть лишь выражение, она ничего не утверждает и не отрицает. Равным образом класс есть лишь выражение; это удобный способ говорить о значениях переменной, при которых функция истинна.

Что касается последнего из перечисленных выше трех условий, которым должно отвечать решение, то я выдвинул теорию, которая, видимо, другим логикам не понравилась; однако я до сих пор считаю ее здравой. Эта теория заключалась в следующем. Когда я утверждаю все значения функции fx, то значения, которые может принимать x, должны быть определенными (definite), если я хочу, чтобы то, что я утверждаю, было определенным. Должна быть, та.к сказать, некоторая тотальность возможных значений x. Если я теперь стану образовывать новые значения в терминах этой тотальности, то тотальность, по-видимому, будет из-за этого расширяться и, следовательно, новые значения, к ней относящиеся, будут относиться к этой более широкой тотальности. Но поскольку они должны быть включены в тотальность, тотальность никогда не будет поспевать за ними. Все это напоминает попытки прыгнуть на собственную тень. Проще всего проиллюстрировать это на парадоксе лжеца. Лжец говорит: “Все, что я утверждаю, ложно”. Фактически то, что он делает, это утверждение, но оно относится к тотальности его утверждений, и, только включив его в эту тотальность, мы получаем парадокс. Мы должны будем различить суждения, которые относятся к некоторой тотальности суждений, и суждения, которые не относятся к ней. Те, которые относятся к некоторой тотальности суждений, никак не могут быть членами этой тотальности. Мы можем определить суждения первого порядка как такие, которые не относятся к тотальности (no totality) суждений; суждения второго порядка-.как такие, которые отнесены к тотальности суждений первого порядка и т. д. ad infiniturn. Таким образом, наш лжец должен будет теперь сказать: “Я утверждаю ложное суждение первого порядка, которое является ложным”. Но само это суждение-второго порядка. Он поэтому не утверждает суждения первого порядка. Говорит он нечто просто ложное, и доказательство того, что оно также и истинно, рушится. Такой же точно аргумент применим и к любому суждению высшего порядка.

Обнаруживается, что во всех логических парадоксах есть своего рода рефлексивная само-отнесенность, которую следует осудить по тем же причинам: она включает в себя в качестве члена тотальности нечто указывающее на эту тотальность и могущее иметь определенное значение, только если тотальность уже фиксирована.

Должен сознаться, что это учение не получило широкого признания, но я не вижу аргумента против, который казался бы мне неоспоримым.

Теория дескрипщий, упомянутая выше, впервые была изложена в моей статье “О денотации" в журнале "Майнд" (1905). Она так поразила тогдашнего редактора журнала, посчитавшего ее нелепой, что он упрашивал меня пересмотреть ее и не настаивать на публикации. Но я был убежден в том, что она является здравой, и отказался уступить. Впоследствии статья получила широкое признание и стала считаться моим важнейшим вкладом в логику. Правда, сегодня ее отвергают те, кто отказывается от различения имен и других слов. Полагаю, такая реакция происходит из-за слабого знакомства с математической логикой. Во всяком случае, я не вижу в такой критике смысла. Признаюсь, однако, что учение об именах, наверное, немного сложнее, чем я когда-то полагал. Впрочем, сейчас я не буду рассматривать эти трудности и возьму язык в его обыденном употреблении.

Я использовал для доказательства противоположность имени "Скотт" и дескрипции "автор Веверлея". Утверждение "Скотт-автор Веверлея" выражает тождество, а не тавтологию. Георг IV желал знать, является ли Скотт автором Веверлея, но не желал знать, является ли Скотт Скоттом. Для всех, кто не изучал логику, это совершенно ясно. Но для логика в этом заключена головоломная трудность. Логики полагают (или полагали раньше), что если два выражения обозначают один и тот же объект, то суждение, содержащее одно выражение, всегда может быть заменено суждением, содержащим другое, и при этом остаться истинным, если оно было истинным, или ложным, если оно было ложным. Но, как мы только что видели, можно превратить истинное суждение в ложное, если заменить "автора Веверлея" на "Скотта". Отсюда видно, что необходимо различать между именем и дескрипцией: "Скотт"-это имя, а "автор Веверлея"-дескрипция.

Другое важное различие между именами и дескрипциями заключается в том, что имя не может осмысленно входить в суждение, если нет чего-то, что оно именует, в то время как дескрипция не подчиняется этому ограничению. Мейнонг, к работам которого я относился тогда с великим почтением, не сумел заметить этого различия. Он указывал, что можно делать утверждения с логическим субъектом "золотая гора", хотя никакой золотой горы не существует. Он доказывал, что когда вы говорите, будто золотой горы не существует, то очевидно, что есть нечто, о чем вы говорите, что этого не существует - а именно, золотая гора; следовательно, золотая гора должна пребывать в некоем туманном Платоновом мире бытия, ибо в противном случае ваше утверждение, что золотая гора не существует, не будет иметь значения. Признаюсь, что, пока. я не пришел к теории дескрипции, этот аргумент казался мне убедительным. Существенно важным моментом в теории было то, что, хотя "золотая гора" может быть в грамматическом смысле субъектом значимого суждения, такое суждение, если его правильно проанализировать, больше не будет иметь субъекта. Суждение "золотая гора не существует" становится суждением "пропозициональная функция "x золотая и гора" ложна для всех значений x". Утверждение "Скотт-автор Веверлея" становится утверждением "для всех значений x "x написал Веверлея" эквивалентно "x-это Скотт". Здесь фраза "автор Веверлея" уже не встречается.

Теория дескрипции пролила также свет на то, что имеется в виду под "существованием". "Автор Веверлея существует" означает "имеется значение с, для которого пропозициональная функция "x написал Веверлея" всегда тождественна "x есть с" истинно". Существование в этом смысле может утверждаться только об описании, и, будучи проанализировано, оно оказывается случаем пропозициональной функции, истинной по крайней мере при одном значении переменной. Мы можем сказать: "Автор Веверлея существует", и мы можем сказать: "Скотт- автор Веверлея"; но "Скотт существует"-скверно с точки зрения грамматики. В лучшем случае это можно проинтерпретировать как означающее "человек, именуемый "Скоттом", существует", но "человек, именуемый "Скоттом" - это дескрипция, а не имя. Когда имя используют правильно, т, е. как собственно имя, грамматически неправильно было бы говорить: "это существует" ("that exists").

Центральная идея теории дескрипции состояла в том, что фраза может обусловливать значение предложения, не имея сама по себе (in isolation) никакого значения. Этому в случае дескрипции имеется точное доказательство: если бы "автор Веверлея" означало что-нибудь другое, чем "Скотт", то "Скотт - автор Веверлея" было бы ложно, а это не так. Если бы "автор Веверлея" означало "Скотт", то "Скотт - автор Веверлея" было бы тавтологией, а это не так. Следовательно, "автор Веверлея" не означает ни "Скотт", ни что-либо другое, т. е. "автор Веверлея" ничего не означает. Что и следовало доказать.